Notas de Espacios Vectoriales

José Luis Mancilla Aguilar
Depto. de Matemática, Fac. de Ingeniería, Univ. de Buenos Aires
`jmancil@fi.uba.ar`

1. Propósito

El objeto de estas notas es repasar las principales definiciones y resultados de la teoría de espacios vectoriales, que se presupone el alumno ha aprendido en cursos previos de álgebra. La mayor parte de los resultados se presentan sin demostración, ya que éstas se encuentran en la mayoría de los libros de texto de álgebra lineal, entre ellos los mencionados en la bibliografía que se encuentra al final de estas notas, bibliografía que, por otra parte, el lector no debe dejar de consultar. Sin embargo, se ha tratado de ilustrar y motivar esos resultados a partir de distintos ejemplos.

Deseo agradecer a Pablo Servidia por la elaboración de los gráficos y a Ada Cammilleri y Rafael García por sus comentarios y sugerencias.

2. Espacios vectoriales

Comencemos recordando la definición de espacio vectorial.

Definición de espacio vectorial.

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V en el que están definidas una ley de composición interna denominada *suma*, que a cada par de elementos u, v de V asocia un elemento w de V denotado $w = u + v$, y una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, que a cada número $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y a cada elemento u de V asigna un elemento $v = \alpha u$, que verifican las siguientes condiciones:

1. *conmutatividad:* $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;
2. *asociatividad:* $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$;
3. existe *elemento neutro*, $0_V \in V$, tal que $u + 0_V = u$, $\forall u \in V$;
4. para cada $u \in V$ existe un *opuesto*, denotado $-u$, tal que $u + (-u) = 0_V$;
5. *distributividad respecto de los escalares:* $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u \in V$;
6. *distributividad respecto de los vectores:* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K$ y $u, v \in V$;
7. *asociatividad respecto de los escalares:* $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in V$ y $\forall u \in V$;
8. $1u = u$, $\forall u \in V$.

A los elementos del espacio vectorial V se los suele denominar vectores, mientras que a los números por los cuales se multiplican esos vectores se los denomina escalares.

Cuando el conjunto de escalares es el conjunto de números reales, es decir, $K = \mathbb{R}$, se dice que V es un espacio vectorial real, mientras que si $K = \mathbb{C}$ se dice que V es un espacio vectorial complejo.

En lo sucesivo trabajaremos tanto con espacios vectoriales reales como complejos, y, a menudo, emplearemos la terminología V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial o V es un espacio vectorial sobre los reales para indicar que V es un espacio vectorial real; similarmente diremos que V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial o un espacio vectorial sobre los complejos para indicar que V es un espacio vectorial complejo. Cuando no se requiera alguna propiedad especial del conjunto de escalares, diremos simplemente que V es un espacio vectorial. De aquí en adelante, en general designaremos a los vectores con letras latinas minúsculas, $u,\ v, \ldots$, a los escalares con letras griegas minúsculas, $\alpha,\ \beta, \ldots$, y, cuando no haya peligro de confusión, al vector nulo de V por 0 en lugar de 0_V.

Propiedades elementales. A partir de los axiomas de espacio vectorial se deducen las siguientes propiedades básicas:

1. el elemento neutro $0 \in V$ es único; también es único el opuesto de un elemento u;
2. $0u = 0\ \forall u \in V$ y $\alpha 0 = 0$ para todo escalar α;
3. si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ ó $u = 0$;
4. si $u \neq 0$, $\alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$; si $\alpha \neq 0$, $\alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$;
5. $(-1)u = -u\ \forall u \in V$.

A continuación presentamos a modo de ejemplo algunos de los espacios vectoriales reales o complejos que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones.

Ejemplo 1

1. Un ejemplo importante de espacio vectorial real es $\mathbb{R}^n$, el conjunto de n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, con la suma definida por

$$(x_1, \ldots, x_n) + (x_1', \ldots, x_n') = (x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n') \tag{1}$$

   y el producto por escalares reales

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \tag{2}$$

   En este caso el elemento neutro para la suma es $(0, 0, \ldots, 0)$ y el opuesto de $u = (x_1, \ldots, x_n)$ es $-u = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

2. Si en lugar de n-uplas reales consideramos n-uplas de componentes complejas, $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$, y definimos la suma mediante la fórmula (1) y el producto por escalares complejos mediante la fórmula (2), tenemos que $\mathbb{C}^n$, el conjunto de n-uplas complejas, es un espacio vectorial complejo.

3. Otro ejemplo importante de K-espacio vectorial es $K^{n\times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) el conjunto de matrices de n filas por m columnas cuyas componentes son elementos de K, con la suma y producto por escalares usuales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

El elemento neutro es la matriz nula, que es aquella cuyos elementos son todos nulos y el opuesto de una matriz A de componentes a_{ij} es la matriz B de componentes $b_{ij} = -a_{ij}$.

4. Un espacio vectorial real que aparece frecuentemente en las aplicaciones es el de las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ definidas en un intervalo I de la recta real, que denotaremos $\mathbb{R}^I$, con la suma y producto por escalares usuales:

- *Suma:* si f y g pertenecen a $\mathbb{R}^I$, su suma, simbolizada por $f+g$, es la función definida por
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$
- *Producto por escalares:* si $f \in \mathbb{R}^I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, su producto, simbolizado αf, es la función definida por
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Por ejemplo, si consideramos el intervalo abierto $I = (0,1)$ y las funciones $f(x) = x + 1/x$ y $g(x) = 1/(x-1)$, entonces

$$(f+g)(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x} \qquad \text{y} \qquad (3f)(x) = 3x + \frac{3}{x}.$$

El elemento neutro para la suma es la función idénticamente nula, es decir, la función h tal que $h(x) = 0$ para todo $x \in I$. Por otra parte el opuesto de la función g es la función $-g$, definida por $(-g)(x) = -(g(x))$ para todo $x \in I$. (Figura 1.)

5. Consideremos un intervalo I de la recta real y denominemos $\mathcal{C}(I)$ al conjunto formado por todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ continuas. $\mathcal{C}(I)$ es un espacio vectorial real con las operaciones suma y producto por escalares definidas en el ejemplo anterior. Note que ambas operaciones son cerradas en $\mathcal{C}(I)$, en el sentido que sus resultados son elementos de $\mathcal{C}(I)$, porque tanto la suma de funciones continuas como el producto de una función continua por una constante son funciones continuas.

La función nula, que es continua y por lo tanto pertenece a $\mathcal{C}(I)$, es el elemento neutro para la suma. Por otra parte, el opuesto de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es la función $-f$ definida en el punto 4, que es continua por serlo f.

6. Otro espacio vectorial real de importancia en las aplicaciones es el de los polinomios a coeficientes reales

$$\mathcal{P} = \{p : \ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0, \ n \in \mathbb{N}_0\},$$

con las operaciones suma y producto por escalares habituales.

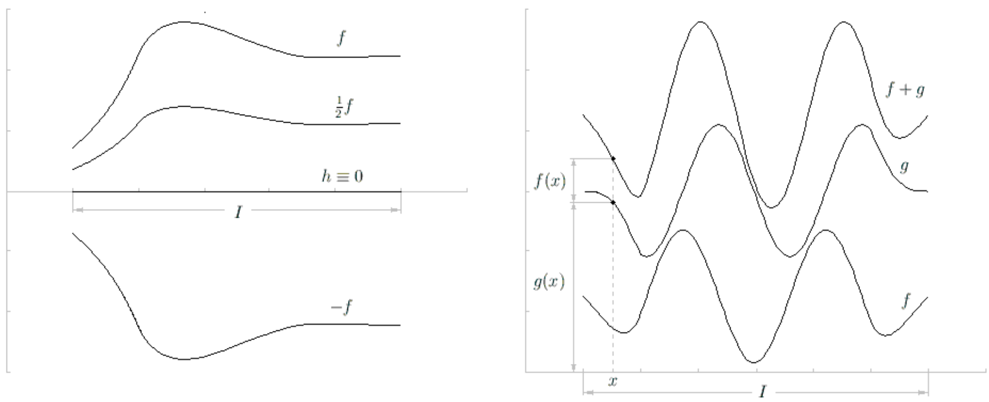

Figura 1:

Los espacios vectoriales reales o complejos que mencionamos hasta aquí, son algunos de los que aparecen más frecuentemente en las aplicaciones del álgebra lineal en la ingeniería. El siguiente ejemplo, que carece de interés práctico, tiene por objeto mostrar un espacio vectorial en el cual, a diferencia de los otros, tanto la operación suma como la operación producto por escalares no están basadas en, respectivamente, las operaciones suma y producto definidas en el conjunto de escalares.

7. Consideremos $V = \mathbb{R}^2_+$, donde $\mathbb{R}^2_+$ es el conjunto de pares ordenados compuestos por números reales positivos. Por ejemplo $(1, 1{,}5) \in \mathbb{R}^2_+$ y $(-1, 0)$ y $(0, 1) \notin \mathbb{R}^2_+$. En V definimos las operaciones suma y producto de la siguiente manera:
   Suma: $(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 x_1', x_2 x_2')$
   Producto por escalares reales: $\alpha(x_1, x_2) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)$.

   Lo primero que observamos es que las operaciones que se han definido son cerradas, porque tanto el producto de números positivos como las potencia de un número positivo son números positivos.

   Respecto de las propiedades de la suma y el producto, es sencillo comprobar aplicando las propiedades del producto y potencia de números reales, que la suma definida verifica las propiedades conmutativa y asociativa y que el producto por escalares satisface las propiedades 5 a 8. Por último, el elemento neutro para la suma es $0 = (1, 1)$ y el opuesto del vector $u = (x_1, x_2)$ es $-u = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$.

Luego de haber visto algunos ejemplos de espacios vectoriales, es importante notar lo siguiente: todo espacio vectorial complejo es a su vez un espacio vectorial real si se considera la misma operación suma y el producto por escalares se restringe a escalares reales.

Por ejemplo, $\mathbb{C}^2$ es un espacio vectorial complejo, y, por lo dicho recién, también es un espacio vectorial real. Sin embargo, si consideramos a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial real, el producto $(2+i)(1, -i)$ carece de sentido pues $\alpha = (2+i)$ no es real. Tampoco es válida la descomposición

$$(1 + 2i, i) = (1 + 2i)(1, 0) + i(0, 1)$$

(que sí vale si consideramos a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial complejo). Una descomposición posible en este caso es

$$(1 + 2i, i) = 1(1, 0) + 2(i, 0) + 1(0, i).$$

Veremos más adelante que, a pesar de tratarse del mismo conjunto de vectores, sus propiedades como espacio vectorial real serán diferentes de sus propiedades como espacio vectorial complejo; por ejemplo, la dimensión del espacio en el primer caso será 4 y en el segundo 2.

Convención. De aquí en más, por comodidad, vamos a convenir en identificar $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y $\mathbb{C}^{n\times 1}$ respectivamente. Es decir, cuando sea conveniente escribiremos en lugar de $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

A menos que se especifique lo contrario, siempre consideraremos tanto a $\mathbb{C}^n$ como a $\mathbb{C}^{n\times m}$ como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

2.1. Subespacios

Algunos de los espacios vectoriales que hemos dado como ejemplo están relacionados entre sí. Por ejemplo, $\mathcal{C}(I)$ es subconjunto de $\mathbb{R}^I$ y $\mathcal{P}$ puede pensarse como subconjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, ya que cada polinomio define una función continua en $\mathbb{R}$. Más aún, *las operaciones son las mismas* tanto en $\mathbb{R}^I$ como en $\mathcal{C}(I)$ y tanto en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ como en $\mathcal{P}$. Esta situación –la de tener un subconjunto de un espacio vectorial V que, con las operaciones definidas en V, también es un espacio vectorial– es muy común y tiene consecuencias importantes.

Definición de subespacio. Un subconjunto $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V es subespacio de V si $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.

Notamos que con esta definición $\mathcal{C}(I)$ es subespacio de $\mathbb{R}^I$ y $\mathcal{P}$ es subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

De acuerdo con la definición de subespacio, para concluir que un subconjunto $\mathcal{S}$ de V es subespacio deberíamos probar lo siguiente:

1. $\mathcal{S}$ no es vacío;

2. la suma y el producto definidos en V son operaciones cerradas en $\mathcal{S}$, es decir, $u + v$ es elemento de $\mathcal{S}$ si u y v son elementos de $\mathcal{S}$, y αu es elemento de $\mathcal{S}$ si α es un escalar arbitrario y u es elemento de $\mathcal{S}$ (en caso contrario la suma no sería una ley de composición interna o el producto por escalares no sería una ley de composición externa);

3. se verifican las propiedades 1 a 8 de la definición de espacio vectorial.

Sin embargo no es necesario probar el tercer punto debido al siguente

Teorema 1 *(Teorema del subespacio). Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces $\mathcal{S}$ es subespacio de V si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{S}$ no es vacío.*

2. *Si u y v pertenecen a $\mathcal{S}$ entonces $u + v$ pertenece a $\mathcal{S}$.*

3. *Si u pertenece a $\mathcal{S}$ y α es un escalar arbitrario, αu pertenece a $\mathcal{S}$.*

Veamos ahora algunos ejemplos de subespacio.

Ejemplo 2

1. Claramente $\mathcal{S} = \{0\}$, (el conjunto que sólo contiene al elemento nulo de V) y $\mathcal{S} = V$ son subespacios de V. A estos subespacios se los denomina subespacios triviales.

2. En $\mathbb{R}^2$ toda recta $\mathcal{S}$ que pase por el origen es subespacio. Esta afirmación puede justificarse mediante el teorema del subespacio apelando a las interpretaciones geométricas de la adición de vectores en el plano (regla del paralelogramo) y del producto de vectores por escalares. En efecto, $\mathcal{S}$ no es vacío porque el origen de coordenadas pertenece a $\mathcal{S}$. Por otra parte, si sumamos dos vectores contenidos en la recta $\mathcal{S}$ aplicando la regla del paralelogramo, se comprueba fácilmente que el vector resultante pertenece a la misma recta. Por último, si multiplicamos un vector cualquiera de $\mathcal{S}$ por un escalar, el vector que obtenemos tiene la misma dirección que el primero y por lo tanto también pertenece a $\mathcal{S}$.

   Mediante argumentos geométricos y el teorema del subespacio también es posible demostrar que toda recta o plano que contenga al origen es subespacio de $\mathbb{R}^3$ (Figura 2).

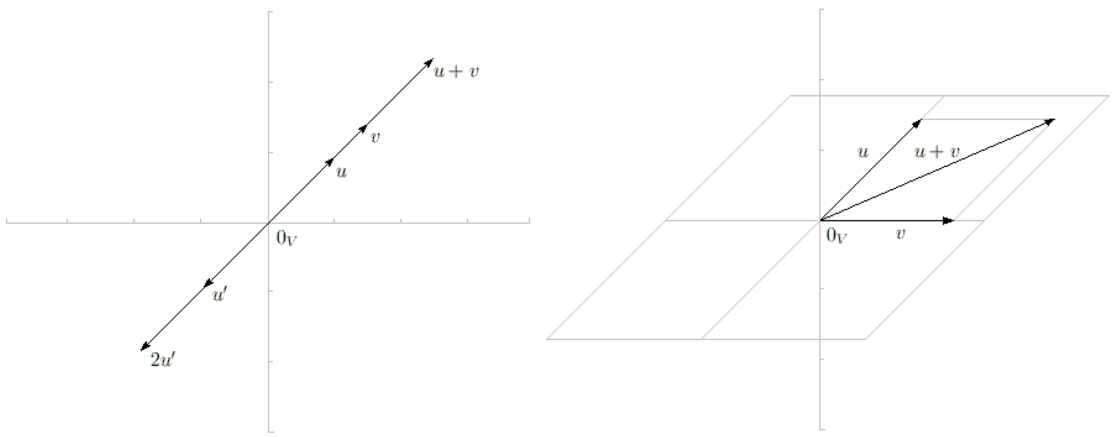

Figura 2:

3. Sea $A \in K^{n\times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), entonces $\mathcal{S} = \{x \in K^m : \ Ax = 0\}$ es subespacio de K^m.

   Para comprobarlo usamos nuevamente el teorema del subespacio.
   i) $\mathcal{S}$ no es vacío porque $0 \in \mathcal{S}$, ya que $A0 = 0$.
   ii) Sean u y $v \in \mathcal{S}$. Por lo tanto $Au = 0$ y $Av = 0$. Entonces $A(u + v) = Au + Av = 0 + 0$, con lo cual $u + v \in \mathcal{S}$.
   iii) Supongamos $u \in \mathcal{S}$. Entonces $Au = 0$. Para comprobar que $v = \alpha u$ con α un escalar arbitrario pertenece a $\mathcal{S}$, veamos que $Av = 0$. Pero $Av = A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha 0 = 0$. Con esto último queda demostrado que $\mathcal{S}$ es subespacio.

   A partir de este resultado se puede deducir en forma analítica que toda recta en $\mathbb{R}^2$ que pase por el origen es subespacio. En efecto, si $\mathcal{S}$ es una recta que pasa por el origen, sus puntos verifican una ecuación de la forma $ax_1 + bx_2 = 0$, es decir, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ax_1 + bx_2 = 0\}$. Si llamamos $A = [a\ b]$, tenemos que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ Ax = 0\}$, que es subespacio por lo que ya vimos.

En forma similar se demuestra que una recta $\mathcal{S}$ en $\mathbb{R}^3$ que pase por el origen es subespacio. En este caso los puntos de $\mathcal{S}$ son solución de un sistema de dos ecuaciones lineales homogeneas, es decir, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \ \wedge dx_1 + ex_2 + fx_3 = 0\}$. Si ahora consideramos la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, tenemos que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ Ax = 0\}$, que es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

4. Dado un número natural o nulo n, denominamos $\mathcal{P}_n$ al subconjunto de $\mathcal{P}$ compuesto por los polinomios de grado menor o igual a n junto con el polinomio nulo. Entonces $p \in \mathcal{P}_n$ si y sólo si $p = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$. Por ejemplo, $p = t^3 + t$ y $q = 2t^2 - t + 1$ son elementos de $\mathcal{P}_3$; q también es elemento de $\mathcal{P}_2$, mientras que p no lo es.

   $\mathcal{P}_n$ es subespacio de $\mathcal{P}$ y, por ende, es un espacio vectorial real. En efecto, $\mathcal{P}_n$ no es vacío porque $\mathcal{P}_n$ contiene al polinomio nulo. Por otra parte, la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es de grado menor o igual a n, y el producto de un polinomio de grado menor o igual a n por una constante es un polinomio de grado menor o igual a n, con lo cual las operaciones suma y producto son cerradas en $\mathcal{P}_n$.

5. Dado un intervalo I de la recta real, consideremos el conjunto $\mathcal{C}^1(I)$ formado por todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ derivables con continuidad. Evidentemente $\mathcal{C}^1(I)$ es un subconjunto de $\mathcal{C}(I)$, pues toda función derivable es continua. Afirmamos que $\mathcal{C}^1(I)$ es subespacio de $\mathcal{C}(I)$. En efecto, como la función nula es derivable y su derivada, que es la misma función nula, es continua, $\mathcal{C}^1(I)$ no es vacío. Por otra parte, si f y g pertenecen a $\mathcal{C}^1(I)$, $f + g$ pertenece a $\mathcal{C}^1(I)$, pues $(f + g)' = f' + g'$ es continua por ser continuas f' y g'. Similarmente, si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ y α es un número real cualquiera, $(\alpha f)' = \alpha f'$ es continua y, por lo tanto, αf pertenece a $\mathcal{C}^1(I)$.

   En forma similar se puede probar que $\mathcal{C}^k(I)$, el conjunto compuesto por todas las funciones definidas en I que son k-veces derivables con continuidad, es subespacio de $\mathcal{C}(I)$.

3. Combinaciones lineales. Dependencia lineal

Dados $v_1, v_2, \cdots, v_r$, vectores de un espacio vectorial V, una *combinación lineal* de ellos es una expresión de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ escalares. Por otra parte, se dice que un vector $v \in V$ es *combinación lineal de* (o que *depende linealmente de*) $v_1, v_2, \ldots, v_r$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r$.

Ejemplo 3

1. El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$, pues $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r$.

2. En $\mathbb{R}^3$, $w = (1, 1, 1)$ es combinación lineal de $v_1 = (2, 1, 3)$ y $v_2 = (1, 0, 2)$, pues

$$w = 1\, v_1 + (-1)v_2.$$

   Asimismo, $(2, 2, 2)$ es combinación lineal de $(1, 1, 1)$ ya que $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$.

3. En $\mathbb{C}^2$, $w = (1+i, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$, pues

$$w = (1+i)v_1 + 2v_2.$$

Sin embargo, w **no es** combinación lineal de v_1 y v_2 si consideramos a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial real. Si lo fuese, w debería poder expresarse en la forma $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ con α_1 y α_2 reales. Pero $(1+i,2) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = 1+i$ y $\alpha_2 = 2$.

4. $f(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$ es combinación lineal de $f_1(x) = \cos(x)$ y $f_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. En efecto, usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$, tenemos que para $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\cos(x)$, con lo cual

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} f_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir

$$f = \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2.$$

Dados los vectores $v_1, \ldots, v_r$, se denomina $\operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$ al conjunto de todas sus posibles combinaciones lineales. Es decir,

$$\operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_r\} = \{v \in V : \; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r\}.$$

Teorema 2 *Dados $v_1, \ldots, v_r \in V$, $\operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$ es subespacio del espacio vectorial V.*

Al subespacio $\mathcal{S} = \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$ se lo denomina *subespacio generado* por los vectores $v_1, \ldots, v_r$ y a estos últimos *generadores* de $\mathcal{S}$.

Ejemplo 4

1. En $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{gen}\{(1,1)\}$ es el conjunto de todos los múltiplos del vector $(1,1)$, el cual coincide con la recta de pendiente 1 que pasa por el origen.

2. En $\mathcal{P}$, $\operatorname{gen}\{1, t, t^2\}$ coincide con $\mathcal{P}_2$, el subespacio compuesto por todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y el polinomio nulo, pues todo polinomio de $\mathcal{P}_2$ se obtiene combinando linealmente los polinomios $p_1 = 1$, $p_2 = t$ y $p_3 = t^2$. Por ejemplo,

$$1 + 2t - t^2 = 1p_1 + 2p_2 + (-1)p_3.$$

3. Sea $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. $\mathcal{S}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$ por estar definido por una ecuación lineal homogénea. Por otra parte,

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1 - x_2.$$

Entonces $x \in \mathcal{S}$ si y sólo si $x = (x_1, x_2, -2x_1 - x_2) = x_1(1,0,-2) + x_2(0,1,-1)$; en consecuencia, $x \in \mathcal{S}$ si y sólo si x es combinación lineal de $v_1 = (1,0,-2)$ y $v_2 = (0,1,-1)$. En otra palabras, $\mathcal{S} = \operatorname{gen}\{v_1, v_2\}$.

Los puntos 2 y 3 del ejemplo anterior motivan la siguiente definición:

Se dice que un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V está generado por los vectores $v_1, \ldots, v_r$ si y sólo si $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$. En esta situación se dice que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un *conjunto generador* de $\mathcal{S}$ y que $\mathcal{S}$ es un subespacio *finitamente generado.*

De acuerdo con los puntos 2 y 3 del Ejemplo 4, $\mathcal{P}_2$ está generado por el conjunto $\{1, t, t^2\}$ mientras que $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ es un conjunto de generador de $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1+x_2+x_3 = 0\}$. En el último caso decimos que $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{S}$ y no “el” conjunto generador de $\mathcal{S}$ pues, por ejemplo, $\{(2,0,-4),(0,2,-2)\}$ y $\{(1,0,-2),(0,1,-1),(1,1,-3)\}$ también generan $\mathcal{S}$ (verifíquelo).

Veamos algunos ejemplos más.

Ejemplo 5

1. $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\{e_1, e_2\}$ con $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. En efecto, si $x = (x_1, x_2)$, $x = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

   Más generalmente, $\mathbb{R}^n = \text{gen}\{e_1, \ldots, e_n\}$ con $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$,...,$e_n = (0,0,\ldots,1)$.

2. $\mathbb{C}^n = \text{gen}\{e_1, \ldots, e_n\}$ con $e_1, \ldots, e_n$ definidos como en el ejemplo anterior.

3. $\mathcal{P}_n = \text{gen}\{1, t, \ldots, t^n\}$.

4. $\mathbb{C}^{2\times 2} = \text{gen}\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, con

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   En efecto, si $A = (a_{ij})$, $A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$.

   En general $\mathbb{C}^{n\times m} = \text{gen}\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1m}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{nm}\}$ donde E_{ij} es la matriz que tiene todos sus elementos nulos, salvo el correspondiente a la posición ij que es 1.

5. $\mathcal{P}$ no es un espacio vectorial finitamente generado. Para demostrarlo procedamos por el absurdo. Supongamos que $\mathcal{P}$ es finitamente generado. Entonces existe un número finito de polinomios no nulos, $p_1, p_2, \ldots, p_N$ tales que

$$\mathcal{P} = \text{gen}\{p_1, \ldots, p_N\}.$$

   Llamemos n_i al grado del polinomio p_i y sea $n_{\text{máx}}$ el máximo entre los grados de los p_i, es decir

$$n_{\text{máx}} = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}.$$

   Entonces, cualquier combinación lineal de los polinomios p_i es nula o tiene a lo sumo grado $n_{\text{máx}}$, con lo cual

$$\mathcal{P} = \text{gen}\{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathcal{P}_{n_{\text{máx}}},$$

   lo que es absurdo, pues el polinomio $q = t^{n_{\text{máx}}+1} \in \mathcal{P}$ pero no a $\mathcal{P}_{n_{\text{máx}}}$. Como suponer que $\mathcal{P}$ es finitamente generado nos lleva a una contradicción, concluimos que $\mathcal{P}$ no es finitamente generado.

3.1. Conjuntos linealmente independientes y bases

Como hemos dicho antes, es posible que un subespacio finitamente generado de un espacio vectorial tenga diferentes conjuntos generadores; por ejemplo, cada uno de los conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,1),(1,-1)\}$ y $\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}$ genera $\mathbb{R}^2$.

Ya vimos que el primero lo hace, veamos ahora que el segundo también genera $\mathbb{R}^2$.

Dado $x = (x_1, x_2)$,

$$(x_1, x_2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) \iff x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{y} \quad x_2 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\alpha_1 = (x_1 + x_2)/2 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = (x_1 - x_2)/2,$$

con lo cual todo $x \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $(1,1)$ y $(1,-1)$ (observe que α_1 y α_2 están unívocamente determinados por x).

Respecto del último conjunto, es obvio que genera $\mathbb{R}^2$ una vez que hemos visto que el conjunto $\{(1,1),(1,-1)\}$ lo hace. Sin embargo hay una diferencia fundamental entre los dos primeros conjuntos y el último: mientras que para los dos primeros conjuntos de generadores la combinación lineal que hay que efectuar para obtener un determinado vector es única, con el último conjunto de generadores es posible combinar los generadores de diferentes formas y obtener el mismo vector, por ejemplo:

$$(1,3) = 2(1,1) + (-1)(1,-1) + 0(1,0) \quad \text{y} \quad (1,3) = 2{,}5(1,1) + (-0{,}5)(1,-1) + (-1)(1,0).$$

Esta diferencia hace que sea preferible trabajar con conjuntos de generadores con las características de los dos primeros, es decir, con conjuntos de generadores tales que la combinación lineal que hay que efectuar para obtener cada vector del subespacio sea única.

La razón por la cual es posible obtener el mismo vector combinando de diferentes maneras los vectores del conjunto $\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}$, es que uno de sus elementos depende linealmente del resto. En efecto, como

$$(1,0) = 0{,}5(1,1) + 0{,}5(1,-1),$$

si x admite la expresión

$$x = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) + \alpha_3(1,0),$$

entonces también admite la expresión

$$x = (\alpha_1 + 0{,}5\alpha_3)(1,1) + (\alpha_2 + 0{,}5\alpha_3)(1,-1) + 0(1,0).$$

Consideremos ahora el caso de un subespacio $\mathcal{S}$ generado por un solo vector v. Si $v \neq 0$, combinaciones lineales diferentes de v dan origen a diferentes vectores, ya que, por una de las propiedades elementales que dimos al principio, $\alpha v = \beta v \Rightarrow \alpha = \beta$. Obviamente, si $v = 0$, distintas combinaciones de v dan origen al mismo vector, por ejemplo, $1v = 2v = 0$.

Los ejemplos anteriores nos sugieren que la condición que debe cumplir un conjunto de generadores para que cada vector del subespacio pueda obtenerse combinando los generadores de una única forma es que, en el caso en que haya más de un generador, ninguno de ellos dependa linealmente del resto y, en el caso en que haya un sólo generador, que éste no sea nulo. Antes de enunciar la condición mencionada conviene introducir algunas definiciones.

Se dice que un conjunto de dos o más vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es **linealmente dependiente** si alguno de los v_i depende linealmente del resto. En el caso en que el conjunto esté formado por un sólo vector v_1, el conjunto es linealmente dependiente si $v_1 = 0$. Por otra parte, se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, lo que es equivalente a que ninguno de los v_i dependa linealmente del resto en el caso en que haya más de un vector en el conjunto, o a que $v_1 \neq 0$ en el caso en que el conjunto esté formado por un único vector.

Existe una definición de independencial lineal equivalente a la que dimos recién, pero más sencilla de verificar:

Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente si y sólo si la única solución de la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0 \tag{3}$$

es la trivial, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$.

Por otra parte $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es linealmente dependiente si y sólo si la ecuación (3) admite una solución no trivial, es decir, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, no todos nulos, tales que vale (3).

Ejemplo 6

1. $\{1; t-1; t^2+2t+1\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}$. Para comprobarlo escribamos

   $$\alpha_1 + \alpha_2(t-1) + \alpha_3(t^2+2t+1) = 0.$$

   Operando en el lado derecho de la ecuación llegamos a la ecuación

   $$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 + 2\alpha_3)t + \alpha_3 t^2 = 0.$$

   Como un polinomio es nulo si y sólo si todos sus coeficientes lo son, necesariamente

   $$\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0, \end{array}$$

   con lo cual, resolviendo el sistema, obtenemos $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$.

2. $\{\operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})\}$ es linealmente dependiente en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, ya que, como vimos en el punto 4 del ejemplo 3, $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Note que esto último implica que la ecuación

   $$\alpha_1 \operatorname{sen}(x) + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 \operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

   admite soluciones no triviales; una de ellas es, por ejemplo, $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\alpha_3 = -1$.

3. $\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Para probarlo, supongamos que α_1 y α_2 son escalares tales que

   $$\alpha_1 \operatorname{sen}(x) + \alpha_2 \cos(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Como suponemos que la igualdad vale para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular vale para $x = 0$, con lo cual

$$\alpha_1 \operatorname{sen}(0) + \alpha_2 \cos(0) = \alpha_2 = 0.$$

Considerando ahora $x = \pi/2$, y teniendo en cuenta que $\alpha_2 = 0$, resulta

$$\alpha_1 \operatorname{sen}(\pi/2) = \alpha_1 = 0,$$

con lo cual demostramos que necesariamente $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, y con ello que conjunto es linealmente independiente. Para finalizar, observe que no nos hubiese servido considerar como segundo punto $x = \pi$, o, más generalmente, $x = k\pi$ con k entero, para probar la independencia lineal.

Munidos del concepto de independencia lineal, estamos en condiciones de enunciar la condición necesaria y suficiente para que un conjunto generador de un subespacio sea tal que cada vector de ese subespacio se obtenga mediante una única combinación lineal de los generadores.

Teorema 3 *Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto generador de un subespacio $\mathcal{S}$ del espacio vectorial V. Entonces son equivalentes:*

1. *Para cada $v \in \mathcal{S}$, existen escalares únicos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, tales que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.*
2. *$\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente.*

Se desprende del teorema anterior que los conjuntos generadores linealmente independientes son preferibles a los que son linealmente dependientes. Esto motiva la siguiente

Definición de base. Un conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V si y sólo si B es un conjunto linealmente independiente que genera $\mathcal{S}$.

Observamos que el subespacio nulo carece de base, pues el conjunto $\{0\}$ es linealmente dependiente.

Ahora surge la siguiente cuestión: dado un conjunto generador de un subespacio $\mathcal{S} \neq \{0\}$ ¿cómo obtenemos una base de $\mathcal{S}$? La respuesta la brinda el siguiente resultado.

Lema 1 *Sea $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ un conjunto generador de un subespacio $\mathcal{S}$. Supongamos que v_{r+1} depende linealmente del resto, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ también es un conjunto generador de $\mathcal{S}$.*

El lema anterior nos indica un método para obtener una base a partir de un conjunto generador. Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto generador de un subespacio $\mathcal{S} \neq \{0\}$. Si $r = 1$, es decir, si el conjunto generador posee un único elemento v_1, se tiene que, como $\mathcal{S} \neq \{0\}$, $v_1 \neq 0$. Por lo tanto $\{v_1\}$ es base de $\mathcal{S}$. Supongamos ahora que $r > 1$. Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente, entonces es base de $\mathcal{S}$. Si es linealmente dependiente, alguno de sus elementos depende linealmente del resto; eliminamos ese elemento del conjunto y obtenemos un conjunto que sigue generando $\mathcal{S}$ pero con $r-1$ elementos en lugar de r. Si el conjunto obtenido es linealmente independiente, es base de $\mathcal{S}$; si es linealmente dependiente, algún elemento es combinación lineal del resto. Entonces eliminando ese elemento del conjunto obtenemos un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$ con $r-2$ elementos. Prosiguiendo de esa manera, después de un número finito de pasos (no más de $r-1$) obtendremos un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$ linealmente independiente, es decir, una base de $\mathcal{S}$. En el peor de los casos llegaremos a un conjunto generador de $\mathcal{S}$ compuesto por un sólo vector, que forzosamente deberá no ser nulo, pues $\mathcal{S} \neq \{0\}$, y que por lo tanto será base de $\mathcal{S}$. Tenemos pues el siguiente resultado:

Teorema 4 *Sea $G = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto generador de un subespacio $\mathcal{S} \neq \{0\}$ de un espacio vectorial V.*

Entonces existe un subconjunto de G que es base de $\mathcal{S}$.

Una de las consecuencias del teorema anterior es la siguiente:

Corolario 1 *Todo subespacio finitamente generado distinto del subespacio nulo posee una base.*

En lo que sigue vamos a enunciar una serie de propiedades útiles e interesantes que se deducen de la existencia de bases.

Lema 2 *Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V. Entonces todo conjunto de vectores de $\mathcal{S}$ con más de r elementos es linealmente dependiente.*

Del lema anterior se deduce que todas las bases de un subespacio $\mathcal{S}$ tienen la misma cantidad de elementos. En efecto, supongamos que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ y que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ son bases de $\mathcal{S}$. Si $r < m$, usando que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de $\mathcal{S}$, tenemos que el conjunto $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es linealmente dependiente, lo cual es absurdo ya que suponemos que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es base. Con un argumento similar al que empleamos para ver que r no puede ser menor que m, se deduce que m tampoco puede ser menor que r. Por lo tanto $r = m$.

Teorema 5 *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio no nulo finitamente generado. Entonces todas las bases de $\mathcal{S}$ tienen el mismo número de elementos.*

Este teorema nos permite definir la dimensión de un subespacio finitamente generado.

Dimensión de un subespacio. Se define la dimensión de un subespacio no nulo finitamente generado como el número de elementos que posee una base cualquiera de $\mathcal{S}$. Por definición el subespacio nulo posee dimensión cero. A la dimensión de $\mathcal{S}$ se la denota $\dim(\mathcal{S})$.

Ejemplo 7

1. Tanto la dimensión de $\mathbb{R}^n$ como la de $\mathbb{C}^n$ (como $\mathbb{C}$-espacio vectorial) es n ya que $E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ con $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ es base tanto de $\mathbb{R}^n$ como de $\mathbb{C}^n$. Ya vimos que E_n genera cada uno de esos espacios (al primero como espacio vectorial real y al segundo como espacio vectorial complejo), por otra parte la independencia lineal es muy sencilla de probar. A la base E_n se la suele denominar base canónica.

2. La dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial no es n sino $2n$. Veámoslo para el caso $n = 2$ (el caso general es similar).

   En primer lugar, notemos que si bien $\{e_1, e_2\}$ es l.i. en $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, ya no genera $\mathbb{C}^2$, pues, por ejemplo, el vector $(2 + i, 1)$ no puede escribirse como combinación lineal de e_1 y e_2 si los escalares de la combinación deben ser reales.

   Veamos ahora que la dimensión es 4. Para ello basta encontrar cuatro vectores l.i. que generen $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   Consideremos los vectores

   $$(1, 0), \quad (i, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (0, i).$$

En primer lugar comprobemos que generan $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Entonces $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ con $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) &= (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \\ &= x_1(1,0) + y_1(i,0) + x_2(0,1) + y_2(0,i),\end{aligned}$$

prueba que (z_1, z_2) es una combinación lineal de los vectores $(1,0)$, $(i,0)$, $(0,1)$ y $(0,i)$ (observe que los escalares de la combinación son reales) y que por lo tanto estos últimos generan el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$.

Veamos ahora que son l.i. Consideremos la ecuación

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(i,0) + \alpha_3(0,1) + \alpha_4(0,i) = (0,0).$$

Efectuando las operaciones obtenemos

$$(\alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_3 + i\alpha_4) = (0,0),$$

con lo cual necesariamente

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_3 + i\alpha_4 = 0.$$

Como los α_i deben ser reales, no cabe otra posibilidad que sean todos nulos (justificarlo), es decir $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, 4$.

3. Las dimensiones de $\mathbb{R}^{n\times m}$ y de $\mathbb{C}^{n\times m}$ son iguales a nm, ya que, como vimos anteriormente, ambos espacios están generados por $E_{n\times m} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1m}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{nm}\}$, con E_{ij} la matriz que tiene todos sus elementos nulos, salvo el que ocupa la posición ij que es 1, y éste es un conjunto linealmente independiente. $E_{n\times m}$ es la base canónica tanto de $\mathbb{R}^{n\times m}$ como de $\mathbb{C}^{n\times m}$.

4. $\{1, t, \ldots, t^n\}$ es base de $\mathcal{P}_n$ (verifíquelo) y por lo tanto $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$. Dicha base es la base canónica del espacio mencionado.

5. Consideremos el conjunto $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2)e^{-x}\}$. V es un espacio vectorial real con las operaciones suma y producto que hemos definido para funciones, ya que con esas operaciones es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{C}([0,1])$. Más aún, $V = \text{gen}\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$. Afirmamos que $\dim(V) = 3$. Para constatarlo basta con ver que el conjunto $\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$ es linealmente independiente. Supongamos

$$\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 x e^{-x} + \alpha_3 x^2 e^{-x} = 0 \qquad \forall x \in [0,1] \tag{5}$$

Evaluando ambos lados de la igualdad en los puntos del intervalo $[0,1]$, $x = 0$, $x = 0{,}5$ y $x = 1$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ e^{-0{,}5}\alpha_1 + 0{,}5e^{-0{,}5}\alpha_2 + 0{,}5^2e^{-0{,}5}\alpha_3 &= 0 \\ e^{-1}\alpha_1 + e^{-1}\alpha_2 + e^{-1}\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

que tiene como única solución $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$.

Otra forma de demostrar la independencia lineal del conjunto es la siguiente. Como $e^{-x} \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$, (5) es equivalente a

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \quad \forall x \in [0,1]. \tag{6}$$

Como el lado derecho de la ecuación es una función polinómica, para que se cumpla (6) es necesario que $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, ya que en caso contrario estaríamos en presencia de un polinomio no nulo que se anula en un número infinito de puntos (todo punto del intervalo $[0, 1]$), lo cual es imposible.

6. Veamos otra demostración de que $\mathcal{P}$ no es finitamente generado. Procedamos por el absurdo. Supongamos que $\mathcal{P}$ es finitamente generado, y por lo tanto de dimensión finita. Sea $N = \dim(\mathcal{P})$. Entonces, aplicando el Lema 2 deducimos que los $N + 1$ polinomios $1, t, \ldots, t^{N+1}$ son l.d., lo cual es absurdo, ya que sabemos que son l.i. Como suponer que $\mathcal{P}$ es finitamente generado lleva a un absurdo, concluimos que $\mathcal{P}$ no es finitamente generado.

Supongamos que la dimensión de un subespacio $\mathcal{S}$ es $\dim(\mathcal{S}) = n$. Para demostrar que un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{S}$ es base de $\mathcal{S}$, según la definición de base debemos probar por una parte que es linealmente independiente y por otra que genera $\mathcal{S}$. Sin embargo, debido al siguiente resultado, la tarea es más sencilla: basta con probar que el conjunto verifica sólo una de las dos condiciones.

Proposición 1 *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial V. Supongamos que* $\dim(\mathcal{S}) = n$. *Entonces:*

1. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{S}$ es linealmente independiente, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathcal{S}$.

2. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{S}$ genera $\mathcal{S}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathcal{S}$.

Ejemplo 8

1. $\{(1, 1), (2, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ pues es linealmente independiente y $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

2. $\{1 - t, 1 + t, t^2\}$ es base de $\mathcal{P}_2$ pues lo generan y $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$. Para comprobar que genera $\mathcal{P}_2$ basta con ver que $1, t$ y t^2 son combinaciones lineales de $\{1 - t, 1 + t, t^2\}$. Pero, $1 = 0{,}5(1 - t) + 0{,}5(1 + t)$, $t = -0{,}5(1 - t) + 0{,}5(1 + t)$ y t^2 obviamente es combinación lineal por formar parte del conjunto.

Para finalizar, no podemos dejar de mencionar un resultado motivado por la siguiente pregunta: Dado un conjunto linealmente independiente $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita ¿ forman parte de alguna base B de V?

Proposición 2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset V$, con $r < n$, un conjunto linealmente independiente.*

Entonces existen $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V.

3.2. Subespacios fundamentales de una matriz [1]

Dada una matriz $A \in K^{n \times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), cada una de sus columnas puede ser interpretada como un vector de K^n. Entonces, si denominamos A_i a la i-ésima columna de A, tenemos que $A_i \in K^n$ y que $A = [A_1\ A_2 \cdots A_m]$.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sus columnas son $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[1] En esta sección identificamos K^r con $K^{r \times 1}$

Similarmente, cada fila de A puede ser interpretada como un vector de K^m transpuesto y, si denominamos F_i al vector columna que se obtiene transponiendo la i-ésima fila de A, podemos escribir

$$A = \begin{bmatrix} F_1^T \\ \vdots \\ F_n^T \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, las filas transpuestas de la matriz A del ejemplo anterior son $F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Con esta última notación, el producto de la matriz A por un vector $x \in K^m$ puede escribirse en la forma

$$Ax = \begin{bmatrix} F_1^T \\ \vdots \\ F_n^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} F_1^T x \\ \vdots \\ F_n^T x \end{bmatrix},$$

que no expresa otra cosa que la regla usual de multiplicación de una matriz por un vector: la i-ésima componente del producto es el producto de la i-ésima fila de A por el vector x.

A cada matriz $A \in K^{n\times m}$ podemos asociarle dos subespacios, denominados, respectivamente, espacios columna y fila. El espacio columna es el subespacio de K^n generado por las columnas de A y se denota $\mathrm{Col}(A)$. En otras palabras

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq K^n.$$

En forma análoga se define el espacio fila, que es el subespacio de K^m generado por las filas transpuestas de A y se denota $\mathrm{Fil}(A)$, es decir,

$$\mathrm{Fil}(A) = \mathrm{gen}\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq K^m.$$

Dado que transponiendo las filas de A obtenemos las columnas de A^T, tenemos que el espacio fila de A no es otro que el espacio columna de A^T, es decir

$$\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Fil}(A).$$

Vamos ahora a dar una interpretación del subespacio $\mathrm{Col}(A)$ que es útil tener en cuenta. Para ello necesitamos la siguiente definición – que es equivalente a la usual– del producto de una matriz por un vector: si $x = [x_1\ x_2 \cdots x_m]^T \in K^m$, el producto de A por x es igual a la siguiente combinación lineal de las columnas de A:

$$Ax = [A_1\ A_2 \cdots A_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m.$$

Por ejemplo, si A es la matriz del ejemplo anterior y $x = [1\ -2]^T$,

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

lo cual coincide, por supuesto, con el producto calculado empleando la regla usual para la multiplicación de matrices.

Entonces, de acuerdo con lo anterior, tenemos que el producto de una matriz por un vector no es otra cosa que combinar linealmente las columnas de la matriz empleando como escalares las componentes del vector. Recíprocamente, toda combinación lineal de las columnas de A puede expresarse en la forma Ax con $x \in K^m$. En efecto, si $y = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m$, entonces $y = Ax$ con $x = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]^T$. En consecuencia, cada vez que multiplicamos A por un vector x obtenemos un elemento de $\mathrm{Col}(A)$ y, por otra parte, cada elemento de $\mathrm{Col}(A)$ puede expresarse en la forma Ax, luego, vale la igualdad:

$$\mathrm{Col}(A) = \{y \in K^n : \ y = Ax, \ x \in K^m\}.$$

Una interpretación similar puede dársele al subespacio $\mathrm{Fil}(A)$, que dejamos a cargo del lector.

Ahora vamos a vincular los subespacios $\mathrm{Col}(A)$ y $\mathrm{Fil}(A)$ con el rango de A. Recordemos de cursos anteriores de álgebra, que el rango de A, denotado $\mathrm{rango}(A)$, es tanto el número máximo de columnas l.i. de A como el número máximo de filas l.i. de A. Entonces, de la primera afirmación, tenemos que $\mathrm{rango}(A)$ es el número de columnas de A que quedan luego de eliminar aquellas que son linealmente dependientes del resto. Pero, como luego de eliminar las columnas que son linealmente dependientes del resto lo que obtenemos es una base de $\mathrm{Col}(A)$, tenemos que

$$\mathrm{rango}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)).$$

Por otra parte, como $\mathrm{rango}(A)$ también es el número de filas de A que quedan luego de eliminar aquellas que son linealmente dependientes del resto, por los mismos motivos que antes, también resulta

$$\mathrm{rango}(A) = \dim(\mathrm{Fil}(A)).$$

Otro subespacio que puede asociarse a la matriz A es el espacio nulo de A, denotado $\mathrm{Nul}(A)$, y definido por

$$\mathrm{Nul}(A) = \{x \in K^m : \ Ax = 0\}.$$

Los subespacios $\mathrm{Nul}(A)$ y $\mathrm{Col}(A)$ están íntimamente relacionados con la ecuación lineal

$$Ax = b, \tag{7}$$

donde $A \in K^{n\times m}$, $b \in K^n$ y $x \in K^m$.

En efecto, $\mathrm{Nul}(A)$ es el conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea $Ax = 0$.

Por otra parte, teniendo en cuenta la interpretación de $\mathrm{Col}(A)$ como conjunto formado por todos los posibles productos Ax,

$$\text{la ecuación (7) tiene solución} \iff b \in \mathrm{Col}(A).$$

De esto último se desprende que la ecuación (7) tiene solución para b arbitrario si y sólo si $\mathrm{Col}(A) = K^n$:

$$Ax = b \text{ tiene solución } \forall\, b \in K^n \iff \mathrm{Col}(A) = K^n \iff \mathrm{rango}(A) = n.$$

Respecto de la unicidad de las soluciones de (7), el lector sabe, por cursos anteriores de álgebra, que es equivalente a que la ecuación lineal homogénea tenga solución única, es decir, equivalente a que $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$.

Por otro lado, la ecuación $Ax = 0$ tiene única solución $x = 0$ si y sólo si la única combinación de las columnas de A que da por resultado el vector nulo es aquella en la que todos los escalares son nulos, en otras palabras, si y sólo si las columnas de A son l.i. En consecuencia, la solución de la ecuación (7), en caso de existir, es única si y sólo si las columnas de A son l.i. Pero esto último es equivalente a que $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rango}(A) = m$. En resumen,

$$Ax = b \text{ tiene a lo sumo una solución} \Leftrightarrow \mathrm{Nul}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Col}(A)) = m \Leftrightarrow \mathrm{rango}(A) = m.$$

Por último, teniendo en cuenta la fórmula que vincula la dimensión del subespacio solución de la ecuación $Ax = 0$, el rango de A y el número de incógnitas de la ecuación,

$$\dim(\{x \in K^m : \; Ax = 0\}) = \text{nro. de incógnitas} - \mathrm{rango}(A),$$

deducimos la siguiente relación entre las dimensiones de $\mathrm{Nul}(A)$ y $\mathrm{Col}(A)$:

$$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = m - \dim(\mathrm{Col}(A)).$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{Fil}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$ y lo anterior, también tenemos la relación

$$\dim(\mathrm{Nul}(A^T)) = n - \dim(\mathrm{Fil}(A)).$$

A los cuatro subespacios asociados a la matriz A: $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Fil}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$ y $\mathrm{Nul}(A^T)$, se los denomina *subespacios fundamentales* de A y juegan un rol muy importante en el Álgebra Lineal Numérica.

3.2.1. Coordenadas

Una base ordenada de un espacio vectorial V de dimensión finita es una base en la cual se ha establecido un orden. Por ejemplo, si consideramos la base ordenada de $\mathbb{R}^2$, $B_1 = \{(1,0); (0,1)\}$, $(1,0)$ es el primer elemento de B_1, mientras que $(0,1)$ es el segundo elemento de B_1. La base ordenada de $\mathbb{R}^2$, $B_2 = \{(0,1); (1,0)\}$, es distinta de la base B_1, a pesar de que los vectores que las componen son los mismos.

En general emplearemos la notación $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ para indicar que la base está ordenada, es decir, separaremos los vectores con punto y coma.

Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de V. Como hemos visto, a cada $v \in V$ corresponde un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Designemos con K a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, según sea V real o complejo. Entonces, con los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ formemos el vector

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^n,$$

que está univocamente determinado por el vector $v \in V$. A tal vector α se lo denomina vector de coordenadas de v respecto de la base B, y se lo denota $\alpha = [v]_B$.

Por otra parte, si $\beta = [\beta_1 \; \beta_2 \; \cdots \; \beta_n]^T \in K^n$, entonces existe un vector v de V, tal que $[v]_B = \beta$. En efecto, tal vector es $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$.

Entonces, de acuerdo con lo que acabamos de decir, fija una base ordenada B de V podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los vectores de V y los vectores de K^n; tal correspondencia consiste en asociar cada vector de V con su vector de coordenadas en la base B.

Para ejemplificar lo expresado, consideremos la base ordenada $B = \{t-1; t+1; t^2+1\}$ de $\mathcal{P}_2$ (verifíquelo). Busquemos las coordenadas de $p = t^2 - t + 1$ en la base B. Para ello es necesario encontrar los escalares α_1, α_2 y α_3 que verifican

$$p = \alpha_1(t-1) + \alpha_2(t+1) + \alpha_3(t^2+1).$$

Operando en el segundo miembro de la igualdad llegamos a la ecuación

$$t^2 - t + 1 = \alpha_3 t^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)t + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Por lo tanto $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ y $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $\alpha_1 = -0{,}5$, $\alpha_2 = -0{,}5$ y $\alpha_3 = 1$, con lo cual $[p]_B = [-0{,}5 \;\; -0{,}5 \;\; 1]^T$.

Por otra parte, dado $v = [0{,}5 \;\; -0{,}5 \;\; 2]^T$, para encontrar f en $\mathcal{P}_2$ tal que $[f]_B = v$, calculamos $f = 0{,}5(t-1) - 0{,}5(t+1) + 2(t^2+1) = 2t^2 + 1$.

Efectuemos ahora la suma de las coordenadas de f con las de p:

$$u = [f]_B + [p]_B = [0 \;\; -1 \;\; 3]^T.$$

Calculemos el elemento g de $\mathcal{P}_2$ tal que $[g]_B = u$:

$$g = -(t+1) + 3(t^2+1) = 3t^2 - t + 2.$$

Por otra parte $p + f = 3t^2 - t + 2 = g$, con lo cual

$$[f]_B + [p]_B = [f+p]_B.$$

Ahora multipliquemos el vector de coordenadas de p por 2:

$$2[p]_B = [-1 \;\; -1 \;\; 2]^T = w.$$

Determinemos el vector q de $\mathcal{P}_2$ que tiene a w como vector de coordenadas:

$$q = -(t-1) - (t+1) + 2(t^2+1) = 2t^2 - 2t + 2 = 2p.$$

Entonces tenemos que

$$2[p]_B = [2p]_B.$$

Los dos últimos ejemplos nos sugieren que la suma de los vectores de coordenadas de dos vectores es igual al vector de coordenadas de la suma de esos vectores, y que el producto de un escalar por el vector de coordenadas de un vector es el vector de coordenadas del producto de ese escalar con ese vector.

Probemos tal conjetura:

Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de V y sean u y $v \in V$. Supongamos $[u]_B = [\beta_1 \; \beta_2 \; \cdots \; \beta_n]^T$ y $[v]_B = [\alpha_1 \; \alpha_2 \; \cdots \; \alpha_n]^T$. Entonces $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ y $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Por lo tanto

$$u + v = (\beta_1 + \alpha_1)v_1 + (\beta_2 + \alpha_2)v_2 + \cdots + (\beta_n + \alpha_n)v_n,$$

con lo cual,

$$[u+v]_B = [\beta_1 + \alpha_1 \;\; \beta_2 + \alpha_2 \cdots \beta_n + \alpha_n]^T = [u]_B + [v]_B.$$

Sea ahora α un escalar cualquiera,

$$\alpha u = \alpha(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n) = (\alpha\beta_1)v_1 + (\alpha\beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha\beta_n)v_n$$

y, por lo tanto,

$$[\alpha u]_B = [\alpha\beta_1 \;\; \alpha\beta_2 \cdots \alpha\beta_n]^T = \alpha[u]_B.$$

Todo lo dicho hasta aquí puede resumirse en el siguiente

Teorema 6 Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Consideremos la aplicación $c_B : V \to K^n$, definida por $c_B(v) = [v]_B$. Entonces:

1. c_B es biyectiva y $c_B^{-1}([\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n]^T) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$.

2. c_B es lineal, es decir, $c_B(u + v) = c_B(u) + c_B(v)$ y $c_B(\alpha u) = \alpha c_B(u)$ $\forall \alpha \in K$, $\forall u, v \in V$.

A la aplicación c_B se la denomina usualmente *isomorfismo de coordenadas.*

Como hemos visto recién, fija una base ordenada B de V podemos reducir todas las operaciones entre vectores de V a operaciones entre vectores de K^n. Más aún, como veremos a continuación, también es posible determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores de V a partir de la dependencia o independencia lineal de sus vectores coordenados.

Proposición 3 Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sea $\{u_1, \ldots, u_r\}$ un conjunto de vectores de V, entonces son equivalentes

1. $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es linealmente independiente en V.

2. $\{[u_1]_B, \ldots, [u_r]_B\}$ es linealmente independiente en K^n.

Demostración: Por el Teorema 6 tenemos que

$$\alpha_1[u_1]_B + \cdots + \alpha_r[u_r]_B = 0 \Longleftrightarrow [\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r]_B = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación $\alpha_1[u_1]_B + \cdots + \alpha_r[u_r]_B = 0$ tiene como única solución $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$ si y sólo si la única solución de la ecuación $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0$ es $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$. En otras palabras, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es linealmente independiente en V si y sólo si $\{[u_1]_B, \ldots, [u_r]_B\}$ es linealmente independiente en K^n.

Ejemplo 9

1. Determinar si $B = \{1 + t; 1 + t - t^2, -1 + 2t - t^2\}$ es base de $\mathcal{P}_2$. Como $\dim(P) = 3$ bastará con ver si son o no l.i.

   Las coordenadas de los vectores en la base canónica de $\mathcal{P}_2$, $E = \{1; t; t^2\}$ son: $[1 + t]_E = [1\ 1\ 0]^T$, $[1 + t - t^2]_E = [1\ 1\ -1]^T$ y $[-1 + 2t - t^2]_E = [-1\ 2\ -1]^T$. Entonces B es base de $\mathcal{P}_2$ si y sólo si los vectores coordenados son linealmente independientes.

   Para estudiar la independencia lineal de estos vectores de $\mathbb{R}^3$ disponemos de varios métodos; por ejemplo, podemos formar una matriz de 3×3 poniendo cada uno de esos vectores como fila y determinar su rango, si éste es igual al número de filas de la matriz, los vectores son linealmente independientes. Apliquemos ese método a este caso. La matriz con la cual trabajamos es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Para calcular su rango aplicamos eliminación gaussiana (triangulación):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} f_2 - f_1 \\ f_3 + f_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como el rango de la última matriz es 3, el rango de la matriz inicial también es 3, ya que, como es sabido, en cada paso de triangulación cambia la matriz pero no el espacio fila. Por lo tanto los vectores coordenados son linealmente independientes y B es base de $\mathcal{P}_2$.

Otra forma de proceder es la siguiente: como A es cuadrada y sólo nos interesa saber si su rango es 3, calculamos su determinante, si éste es distinto de cero entonces rango$(A) = 3$, en caso contrario rango$(A) < 3$. Como $\det(A) = 3$, el rango de A es 3 y B es base de $\mathcal{P}_2$.

2. Sea $\{v_1; v_2; v_3; v_4\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V. Hallar una base del subespacio $\mathcal{S} = \text{gen}\{w_1, w_2, w_3\}$, con $w_1 = v_1 + v_2 - v_3$, $w_2 = 2v_1 + v_2 + v_4$ y $w_3 = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3 + v_4$.

   Para resolver el problema debemos eliminar, si los hay, vectores del conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que sean combinación lineal del resto. Para ello trabajamos con las coordenadas de los vectores en la base B:

$$[w_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [w_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [w_3]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Igual que en el ejemplo anterior armamos una matriz, en este caso de 3×4, poniendo como filas a los vectores coordenados, y aplicamos eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 4f_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Como no se efectuó ningún intercambio de filas, podemos concluir que las dos primeras filas de la matriz original son linealmente independientes y que la tercer fila depende linealmente de las dos primeras. Por lo tanto w_1 y w_2 son linealmente independientes y w_3 depende linealmente de estos dos. Luego $\{w_1, w_2\}$ es base $\mathcal{S}$ y $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

   Otra base de $\mathcal{S}$ es $\{u_1, u_2\}$ con u_1 y u_2 los vectores cuyas coordenadas son las filas no nulas de la última matriz que obtuvimos al aplicar eliminación gaussiana, ya que, como dijimos en el punto anterior, si bien las matrices que se van obteniendo durante el proceso de triangulación son distintas, las filas de cada matriz generan el mismo subespacio. Entonces

$$\{u_1, u_2\} \quad \text{con} \quad u_1 = v_1 + v_2 - v_3 \quad \text{y} \quad u_2 = -v_2 + 2v_3 + v_4,$$

   también es base de $\mathcal{S}$.

Matriz de cambio de base

Como hemos visto, dada una base ordenada B de un espacio vectorial V de dimensión n podemos identificar cada vector de V con su vector de coordenadas en la base B, y operar con los vectores de V como si estuviésemos en K^n. En algunas aplicaciones es posible que comencemos describiendo un problema usando las coordenadas de los vectores en una base B, pero que su solución se vea facilitada si empleamos las coordenadas de los vectores en otra base ordenada C. Entonces aparece naturalmente el siguiente problema:

Dadas las coordenadas de v en la base ordenada B, obtener las coordenadas de v en la base ordenada C.

Una manera obvia de resolver el problema consiste en hacer lo siguiente: dado $[v]_B$ obtenemos v combinando los vectores de la base B y luego, a partir de éste, calculamos $[v]_C$. Sin embargo ésta no es la solución que deseamos, ya que no es implementable en forma computacional, en el sentido que una computadora digital sólo trabaja con vectores y matrices de números. Lo que queremos es obtener las coordenadas de los vectores en la base C efectuando sólo operaciones algebraicas con las coordenadas de los vectores en la base B.

Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$. Entonces, si $[v]_B = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m]^T$, tenemos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Usando la linealidad de las coordenadas, resulta

$$[v]_C = \alpha_1 [v_1]_C + \alpha_2 [v_2]_C + \cdots + \alpha_n [v_n]_C.$$

Si llamamos M a la matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $M_1 = [v_1]_C$, $M_2 = [v_2]_C, \ldots, M_n = [v_n]_C$, es decir, $M = [\,[v_1]_C\ [v_2]_C \cdots [v_n]_C\,]$, y tenemos en cuenta la interpretación del producto de una matriz por un vector como combinación lineal de las columnas de la matriz, tenemos que

$$[v]_C = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \cdots + \alpha_n M_n = M[v]_B.$$

Entonces, multiplicando el vector coordenado del vector v en la base B por la matriz M obtenemos las coordenadas del vector v en la base C.

Supongamos ahora que $M^* \in K^{n \times n}$ es tal que $[v]_C = M^*[v]_B$ para todo $v \in V$. Queremos ver que $M = M^*$. Para ello basta con ver que tienen las mismas columnas.

Llamemos $M_1^*, \ldots, M_n^*$ a las columnas de M^* y tengamos en cuenta que las coordenadas de los vectores de la base B en la misma base son $[v_1]_B = e_1$, $[v_2]_B = e_2, \ldots, [v_n]_B = e_n$, con $e_1, \ldots, e_n$ los vectores canónicos de K^n. Entonces,

$$\begin{aligned}
M_1 = [v_1]_C &= M^*[v_1]_B = [M_1^*\ M_2^* \cdots M_n^*]e_1 = 1M_1^* + 0M_2^* + \cdots + 0M_n^* = M_1^* \\
M_2 = [v_2]_C &= M^*[v_2]_B = [M_1^*\ M_2^* \cdots M_n^*]e_2 = 0M_1^* + 1M_2^* + \cdots + 0M_n^* = M_2^* \\
&\vdots \\
M_n = [v_n]_C &= M^*[v_n]_B = [M_1^*\ M_2^* \cdots M_n^*]e_n = 0M_1^* + 0M_2^* + \cdots + 1M_n^* = M_n^*,
\end{aligned}$$

y $M = M^*$.

Resumimos todo lo dicho en el siguiente

Teorema 7 *Sean B y C bases ordenadas del espacio vectorial V y sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$. Entonces, existe una única matriz $M \in K^{n \times n}$ tal que*

$$[v]_C = M[v]_B \quad \forall v \in V.$$

Además, M es la matriz cuyas columnas son los vectores coordenados de los vectores de la base B en la base C, es decir

$$M = [\,[v_1]_C\ [v_2]_C \cdots [v_n]_C\,].$$

A la matriz M del teorema se la denomina matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base C y se la denota C_{BC}.

Las siguientes propiedades de las matrices de cambio de bases son de utilidad

Teorema 8 *Sean B, C y D tres bases ordenadas de un espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces*

1. $C_{BD} = C_{CD}C_{BC}$.
2. C_{BC} *es inversible y* $C_{BC}^{-1} = C_{CB}$.

Demostración. Empecemos por el punto 1. Queremos ver que $M = C_{CD}C_{BC} = C_{BD}$. Para ello es suficiente comprobar que $[v]_D = M[v]_B$ para todo $v \in V$, ya que la matriz de cambio de base es única. Pero $M[v]_B = (C_{CD}C_{BC})[v]_B = C_{CD}(C_{BC}[v]_B) = C_{CD}[v]_C = [v]_D$.

Probemos ahora el punto 2. En primer lugar notemos que $C_{BB} = I$, donde I es la matriz identidad. En efecto, como para todo $v \in V$, $[v]_B = I[v]_B$, nuevamente por la unicidad de las matrices de cambio de base tenemos que $C_{BB} = I$. Entonces, usando el punto 1 deducimos que $C_{BC}C_{CB} = C_{CC} = I$ y que $C_{CB}C_{BC} = C_{BB} = I$ y con ello que C_{BC} es inversible y $C_{BC}^{-1} = C_{CB}$.

Ejemplo 10

Consideremos la base $B = \{1-t; 1+t; 1+t+t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ y supongamos que deseamos hallar las coordenadas de $p = a_2t^2 + a_1t + a_0$ en la base B. Para resolver el problema podemos proceder de dos maneras: a) plantear la igualdad $p = \alpha_1(1-t) + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1+t+t^2)$ y resolver las ecuaciones lineales que resulten; b) teniendo en cuenta que en E, la base canónica de $\mathcal{P}_2$, $[p]_E = [a_0\ a_1\ a_2]^T$, calculamos C_{EB} y luego obtenemos $[p]_B$ haciendo $[p]_B = C_{EB}[p]_E$.

Sigamos el segundo camino. Para hallar C_{EB} podemos hacer dos cosas, calcular los vectores coordenados de los elementos de la base canónica, 1, t, t^2, en la base B y luego formar con ellos C_{EB}, o, calcular C_{BE} para luego, invirtiendo esa matriz, calcular C_{EB}. Hagámoslo de las dos formas.

Para calcular $[1]_B$ planteamos la igualdad $1 = \alpha_1(1-t) + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1+t+t^2)$, la que nos lleva, luego de aplicar la propiedad distributiva y agrupar los términos de igual grado, a la igualdad

$$1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t + \alpha_3 t^2$$

y de allí al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$ y $\alpha_3 = 0$. Entonces $[1]_B = [0{,}5\ \ 0{,}5\ \ 0]^T$. Procediendo en la misma forma con t y t^2 se obtienen, para $[t]_B$ el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha_1 = -0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$ y $\alpha_3 = 0$, con lo cual $[t]_B = [-0{,}5\ 0{,}5\ 0]^T$, y para t^2 el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 1$ y por lo tanto $[t^2]_B = [0\ \ -1\ 1]^T$.

Luego, armamos la matriz C_{EB} poniendo los vectores coordenados $[1]_B$, $[t]_B$, $[t^2]_B$ como columnas de esa matriz:

$$C_{EB} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como dijimos, también podemos hallar C_{EB} invirtiendo C_{BE}. C_{BE} es fácil de calcular, pues los vectores coordenados de $1-t$, $1+t$ y $1+t+t^2$ en la base canónica se obtienen directamente y son $[1-t]_E = [1\ \ -1\ 0]^T$, $[1+t]_E = [1\ 1\ 0]^T$ y $[1+t+t^2]_E = [1\ 1\ 1]^T$, con lo cual

$$C_{BE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, invirtiendo C_{BE} obtenemos nuevamente

$$C_{EB} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para finalizar, una vez calculada C_{EB} hallamos $[p]_B$ haciendo, como ya dijimos,

$$[p]_B = C_{EB}[p]_E = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5a_0 - 0{,}5a_1 \\ 0{,}5a_0 + 0{,}5a_1 - a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

4. Operaciones entre subespacios

4.1. Intersección de subespacios

La primera operación entre subespacios que vamos a considerar es la intersección de un número finito de ellos.

Teorema 9 *Dados $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r$, subespacios de un espacio vectorial V, su intersección*

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_r = \{v \in V :\ v \in \mathcal{S}_1 \wedge v \in \mathcal{S}_2 \wedge \ldots \wedge v \in \mathcal{S}_r\}$$

también es subespacio de V.

La unión de subespacios en general no resulta subespacio, como lo muestra el siguiente

Ejemplo 11

Consideremos las rectas $\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2 = 0\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 - x_2 = 0\}$ que pasan por el origen. Su unión es el conjunto de puntos que pertenecen a alguna de las dos rectas. Si $v = (1, -1)$ y $u = (1, 1)$, tenemos que tanto v como u se encuentran en $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Sin embargo su suma $v + u = (2, 0)$ no pertenece a ninguna de las dos rectas y por lo tanto $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ no es subespacio pues la suma no es cerrada. (Figura 3.)

En general, ni la diferencia de dos subespacios ni el complemento de un subespacio resultan subespacios, ya que en ambos casos 0 no pertenece al conjunto resultante.

En conclusión, la única operación de conjuntos entre subespacios que da por resultado un subespacio es la intersección.

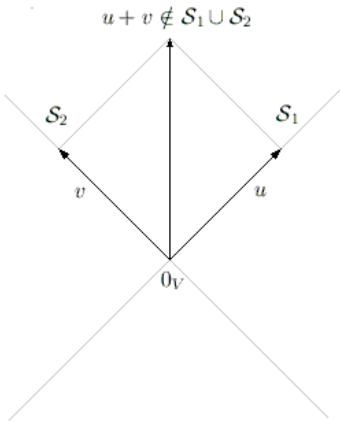

Figura 3:

4.2. Suma de subespacios

Otra operación entre subespacios es la suma, que se define de la siguiente manera: dados los subespacios $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$, al conjunto conformado por todos los vectores de la forma

$$v = v_1 + \cdots + v_r \quad \text{con} \quad v_1 \in \mathcal{S}_1 \ldots, v_r \in \mathcal{S}_r \tag{8}$$

se lo denomina suma de los subespacios $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$, y se lo denota por $\mathcal{S}_1 + \cdots + \mathcal{S}_r$.

Teorema 10 *Dados $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$, subespacios de un espacio vectorial V, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \cdots + \mathcal{S}_r$ es subespacio de V.*

Ejemplo 12

1. En $\mathbb{R}^2$, la suma de dos rectas distintas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ que pasan por el origen es $\mathbb{R}^2$. Esto puede comprobarse gráficamente viendo que todo vector del plano puede expresarse como suma de un vector de $\mathcal{S}_1$ y otro de $\mathcal{S}_2$. (Figura 4.)

2. También se comprueba gráficamente que en $\mathbb{R}^3$, la suma de dos rectas distintas que pasan por el origen es el plano que las contiene y la suma de un plano que pasa por el origen con una recta que también pasa por el origen, pero no está contenida en el plano, es $\mathbb{R}^3$.

3. Si consideramos en un espacio vectorial V los subespacios $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{v_1\}$, $\mathcal{S}_2 = \text{gen}\{v_2\}, \ldots$, $\mathcal{S}_r = \text{gen}\{v_r\}$, tenemos que

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r = \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}.$$

   Veamos primero que $\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$, es decir, que toda combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ pertenece a la suma de los subespacios $\mathcal{S}_i$. Supongamos $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$. Como $u_i = \alpha_i v_i \in \mathcal{S}_i$, tenemos que v puede expresar como suma de vectores de los subespacios $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r$, y por lo tanto $v \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$.

   Veamos ahora que $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r \subset \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Sea $v \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$, entonces $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$ con $u_i \in \mathcal{S}_i$. Como $\mathcal{S}_i = \text{gen}\{v_i\}$, $u_i = \alpha_i v_i$ para cierto escalar α_i, con lo cual $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$, es decir, $v \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$.

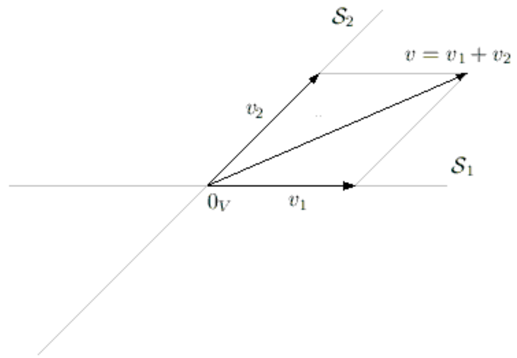

Figura 4:

El último ejemplo se generaliza inmediatamente al caso en que cada subespacio $\mathcal{S}_i$ esté generado por un número finito de vectores, obteniéndose el siguiente resultado:

Proposición 4 *Sean* $\{v_{11}, \ldots, v_{1k_1}\}$, $\{v_{21}, \ldots, v_{2k_2}\}$, ..., $\{v_{r1}, \ldots, v_{rk_r}\}$, *conjuntos generadores de los subspacios* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r$ *de un espacio vectorial* V, *respectivamente.*

Entonces

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r = \text{gen}\{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1k_1}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2k_2}, \ldots, v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rk_r}\},$$

es decir, la unión de conjuntos generadores de los subespacios $\mathcal{S}_i$ *es un conjunto de generadores de la suma de ellos.*

Ejemplo 13

Obtener una base de la suma de los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\ \wedge\ x_1 - x_4 = 0\}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \text{gen}\{(1,1,0,0),\ (2,1,2,1)\}.$$

Para resolver el problema necesitamos un conjunto generador de $\mathcal{S}_1$. Resolviendo las ecuaciones lineales homogéneas que definen el subespacio $\mathcal{S}_1$, obtenemos la siguiente base de $\mathcal{S}_1$, $\{(1,-1,0,1), (0,1,2,0)\}$. Como $\{(1,1,0,0),\ (2,1,2,1)\}$ genera $\mathcal{S}_2$, más aún, es base de ese subespacio, aplicando el resultado que recién mencionamos, tenemos que

$$\{(1,-1,0,1), (0,1,2,0), (1,1,0,0),\ (2,1,2,1)\}$$

es un conjunto generador de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$. Sin embargo, este conjunto no es base, ya que es l.d (compruébelo). Aplicando, por ejemplo, eliminación Gaussiana, se comprueba que el cuarto vector es combinación lineal de los tres primeros, y que estos últimos son l.i., con lo cual

$$\{(1,-1,0,1), (0,1,2,0), (1,1,0,0)\}$$

es la base buscada.

Como se desprende del ejemplo anterior, la unión de bases de los subespacios $\mathcal{S}_i$ es un conjunto generador de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$, pero no es necesariamente base de esa suma.

4.2.1. Suma directa de subespacios

Como ya hemos visto, cada elemento v de $\mathcal{S}_1 + \cdots + \mathcal{S}_r$ puede expresarse en la forma (8). Sin embargo esta descomposición de v como suma de elementos de los subespacios $\mathcal{S}_i$ no tiene por qué ser única. Por ejemplo, si consideramos los subespacios $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ del último ejemplo, $v = (2,1,2,1) \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, pues $v \in \mathcal{S}_2$, y además puede expresarse como suma de un vector de $\mathcal{S}_1$ y otro de $\mathcal{S}_2$ en más de una forma, una de ellas es evidentemente $v = 0 + v$, mientras que otra es, por ejemplo, $v = v_1 + v_2$ con $v_1 = (1,0,2,1) \in \mathcal{S}_1$ y $v_2 = (1,1,0,0) \in \mathcal{S}_2$.

Cuando cada $v \in \mathcal{S}_1 + \cdots + \mathcal{S}_r$ puede descomponerse como suma de vectores de los subespacios $\mathcal{S}_i$ en forma única, se dice que la suma es directa. Más precisamente:
Se dice que la suma de los subespacios $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$ es **directa** si cada $v \in \mathcal{S}_1 + \cdots + \mathcal{S}_r$ admite una única descomposición

$$v = v_1 + \cdots + v_r \quad \text{con} \quad v_1 \in \mathcal{S}_i \ldots, v_r \in \mathcal{S}_r,$$

es decir, si los $v_i \in \mathcal{S}_i$ que aparecen en la descomposición de v son únicos. Cuando la suma de los subespacios $\mathcal{S}_i$ es directa se emplea la notación

$$\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_r.$$

Ejemplo 14

1. La suma de un subespacio arbitrario $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V con el subespacio nulo $\{0\}$ es directa, es decir,
$$\mathcal{S} \oplus \{0\} = \mathcal{S},$$
pues la única forma de expresar $v \in \mathcal{S}$, como suma de un elemento de $\mathcal{S}$ con uno de $\{0\}$ es $v = v + 0$.

2. La suma de dos rectas distintas de $\mathbb{R}^3$ que pasen por el origen es directa. En efecto, su suma es el plano que contiene a ambas rectas y cada vector de ese plano puede descomponerse en forma única como suma dos vectores, uno en la primer recta y otro en la segunda.

   También en $\mathbb{R}^3$ es directa la suma de un plano que pase por el origen con una recta que también pase por el origen pero no esté contenida en el plano. Es fácil ver que todo vector de $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse como suma de un vector en el plano y otro en la recta, y que esta descomposición es única.

3. En $\mathbb{R}^3$ la suma de dos planos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ que contengan al origen nunca es directa.

   Sea $\mathcal{L} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Entonces $\mathcal{L}$ es una recta o un plano que pasa por el origen. Sea w cualquier vector no nulo de $\mathcal{L}$. Luego $w \in \mathcal{S}_1$ y $w \in \mathcal{S}_2$, con lo cual también $-w \in \mathcal{S}_2$. Pero entonces $0 \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ admite las dos siguientes descomposiciones:
$$0 = 0 + 0 \qquad \text{y} \qquad 0 = w + (-w),$$
   que demuestran que la suma de $\mathcal{S}_1$ con $\mathcal{S}_2$ no es directa. (Figura 5.)

Observamos que en todos los casos del ejemplo anterior en los cuales la suma de los subespacios es directa, la intersección de ellos es el subespacio nulo, mientras que en el ejemplo en el cual la suma no es directa, la intersección de los subespacios no es el subespacio nulo. El siguiente resultado afirma que esto no es casual.

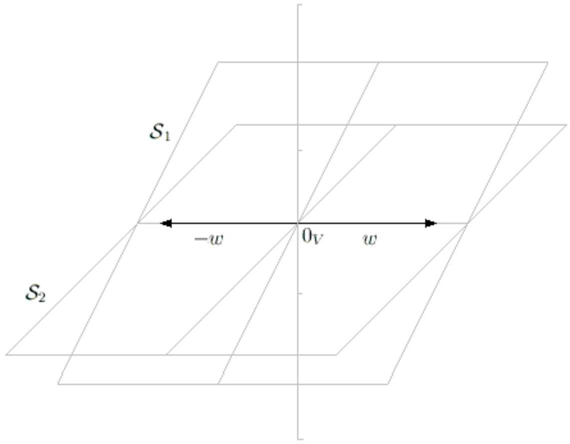

Figura 5:

Proposición 5 *Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ subespacios de un espacio vectorial V. Entonces la suma de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ es directa si y sólo si $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$.*

Ejemplo 15

1. Ya vimos, mediante argumentos geométricos, que en $\mathbb{R}^2$ la suma de dos rectas distintas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ que pasan por el origen es igual a $\mathbb{R}^2$. Veamos ahora analíticamente que esta suma además de ser $\mathbb{R}^2$ es directa. En efecto, si v_1 y v_2 son vectores no nulos de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, respectivamente, tenemos que $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{v_1\}$ y $\mathcal{S}_2 = \text{gen}\{v_2\}$, con lo cual $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{v_1, v_2\}$. Como B=$\{v_1, v_2\}$ es l.i. (si fuese l.d., $v_2 = cv_1$ y entonces $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$), B es base de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^2$. Por otra parte $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$, pues si $v \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ entonces $v = \alpha_1 v_1 = \alpha_2 v_2$ y, necesariamente, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, puesto que en caso contrario $\{v_1, v_2\}$ sería l.d.

2. En $\mathbb{R}^{n\times n}$ la suma del subespacio $\mathcal{S}$ de matrices simétricas con el subespacio $\mathcal{A}$ de matrices antisimétricas es directa e igual a $\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n}$. Para comprobarlo tenemos que ver que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede descomponerse en la forma $A = A_1 + A_2$, con A_1 simétrica, es decir $A_1^T = A_1$, y A_2 antisimétrica, es decir $A_2^T = -A_2$, y que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Escribamos
$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$
y probemos que $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica y que $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$ es antisimétrica. Por un lado
$$A_1^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_1$$
y, por el otro,
$$A_2^T = \left[\frac{1}{2}(A - A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_2.$$

Veamos por último que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Sea $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$. Entonces $A = A^T$ y $A = -A^T$, con lo cual $A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$.

Para el caso de más de dos subespacio se puede dar una condición similar a la dada en la Proposición 5.

Proposición 6 *Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r$ subespacios de un espacio vectorial V. Entonces la suma $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$ es directa si y sólo si*

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}, \quad (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) \cap \mathcal{S}_3 = \{0\}, \quad \cdots \quad \text{y} \quad (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_{r-1}) \cap \mathcal{S}_r = \{0\}.$$

En lo que sigue enunciaremos una condición sencilla de verificar en términos de bases de los subespacios involucrados, sin embargo conviene dar antes la siguiente condición.

Lema 3 *Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r$ subespacios de un espacio vectorial V. Entonces la suma $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$ es directa si y sólo si el vector nulo admite una única descomposición, esto es,*

$$0 = v_1 + \cdots + v_r \quad \text{con} \quad v_1 \in \mathcal{S}_i \ldots, v_r \in \mathcal{S}_r,$$

si y sólo si $v_1 = 0, v_2 = 0, \ldots, v_r = 0$.

A partir de ese resultado se demuestra sin demasiada dificultad el siguiente

Teorema 11 *Sean $B_1, B_2, \ldots, B_r$ bases de los subspacios $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$,..., $\mathcal{S}_r$ de un espacio vectorial V, respectivamente. Entonces la suma $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \cdots + \mathcal{S}_r$ es directa si y sólo si $B = B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_r$ es linealmente independiente.*

Ejemplo 16

1. La suma de los subespacios de $\mathbb{R}^5$,

   $$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{(1,1,0,0,-1),(1,0,1,0,0)\}, \quad \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{(2,1,0,1,-1)\}, \quad \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{(1,1,-1,1,0)\},$$

   es directa, ya que el conjunto

   $$B = \{(1,1,0,0,-1),(1,0,1,0,0),(2,1,0,1,-1),(1,1,-1,1,0)\},$$

   es linealmente independiente y por lo tanto base de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$.

2. La suma de los subespacios de $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{S}_1 = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0\}$, $\mathcal{S}_2 = \text{gen}\{t^3 + 8\}$ y $\mathcal{S}_3 = \text{gen}\{2t^3 + t^2 + 15\}$ no es directa.

   En efecto, $B_1 = \{t^2 - 1, t^3 - t\}$, $B_2 = \{t^3 + 8\}$ y $B_3 = \{2t^3 + t^2 + 15\}$ son, respectivamente, bases de $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$, pero el conjunto $\{t^2 - 1, t^3 - t, t^3 + 8, 2t^3 + t^2 + 15\}$ es l.d. (verificarlo).

Dado un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V se dice que un subespacio $\mathcal{W}$ es un *suplemento* de $\mathcal{S}$ si

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{W} = V.$$

A partir del Teorema 11 y la Proposición 2, se deduce fácilmente el siguiente resultado que afirma que, dado un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial de dimensión finita V, siempre existe un suplemento $\mathcal{W}$.

Proposición 7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.*

Entonces, dado un subespacio $\mathcal{S}$ de V, existe un subespacio $\mathcal{W}$ de V tal que

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{W} = V.$$

Demostración. Si $\mathcal{S} = \{0\}$ ó V, tomamos, respectivamente, $\mathcal{W} = V$ ó $\{0\}$ y, en ambos casos,

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{W} = V.$$

Veamos ahora el caso $1 \leq \dim(\mathcal{S}) = r \leq n - 1$.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $\mathcal{S}$. Entonces, por la proposición 2, existen $v_{r+1}, \ldots, v_n$, tales que

$$\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\},$$

es base de V. Entonces, si consideramos

$$\mathcal{W} = \text{gen}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\},$$

tenemos, por la Proposición 11, que

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{W} = V,$$

que es lo que queríamos probar.

Observamos que la demostración del resultado anterior nos da un método para hallar un suplemento $\mathcal{W}$ de un subespacio $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial de dimensión finita distinto de los subespacios triviales. Simplemente debemos extender una base de $\mathcal{S}$ a una base de V y tomar como $\mathcal{W}$ el subespacio generado por los vectores que agregamos. Esto último muestra también que un subespacio distinto de los triviales admite más de un suplemento, ya que éste dependerá de los vectores que agreguemos para completar la base.

Por ejemplo, dado el subespacio de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} = \text{gen}\{(1,1)\}$, tanto $\mathcal{W}_1 = \text{gen}\{(1,-1)\}$ como $\mathcal{W}_2 = \text{gen}\{(1,0)\}$ son suplementos de $\mathcal{S}$, pues tanto $\{(1,1),(1,-1)\}$ como $\{(1,1),(1,0)\}$ son base de $\mathbb{R}^2$.

5. Bibliografía

1. Juan de Burgos, *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, 1996.
2. Stanley Grossman, *Álgebra Lineal con Aplicaciones*, Mac Graw-Hill, tercera edición, 1990.
3. Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, 1984.
4. David Lay, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, 1999.
5. A.I. Maltsev, *Fundamentos de Álgebra Lineal*, MIR, 1978.
6. Ben Noble y James W. Daniel, *Álgebra Lineal Aplicada*, Prentice Hall, tercera edicin, 1989.
7. David Poole, *Álgebra Lineal: una Introducción Moderna*, Thomson, 2004.
8. Jesús Rojo, *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, 2001.
9. Gilbert Strang, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.